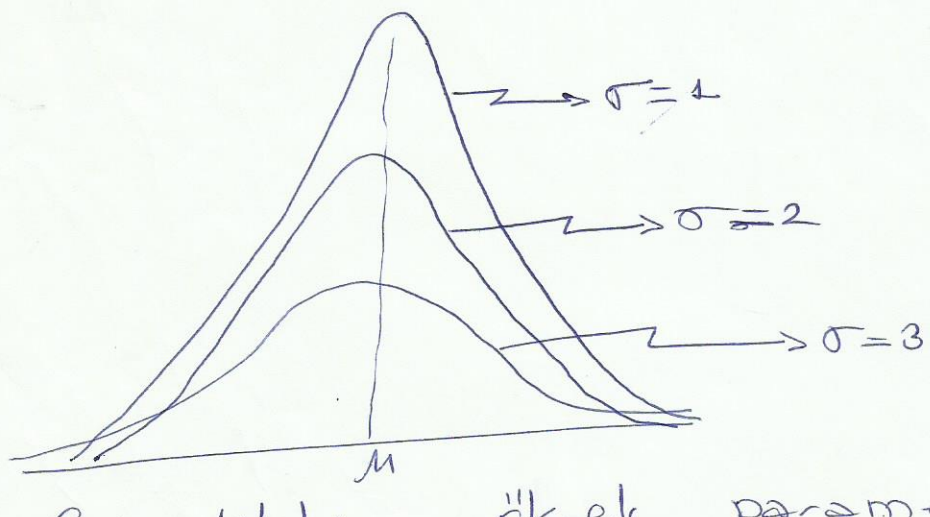
2. Normal Dağılım:

İstatistikte ~~en çok~~ kullanılan dağılımdır. Bütün dağılımlar limit hali olarak Normal dağılıma yaklaşırlar. Gauss dağılımı olarak da bilinir. İki parametreli (μ ve σ) bir dağılım olup olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma \geq 0 \end{array} \\ 0, & \text{d.h.} \end{cases}$$

Burada μ, dağılımın ortalamasını, σ ise standart sapmasını gösterir. X, t.d. normal dağılıma sahipse $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. Aşağıdaki grafikte normal dağılım eğrisi verilmiştir.



Grafikte, ölçek parametresinin (σ) dağılışı nasıl etkilediği görülmektedir. Dağılımın ortalaması aynı olmasına rağmen σ'nın ölçüsünün büyüklüğüne göre dağılımın eğrisi sivrilmekte veya yaygınlaşmaktadır. Normal dağılımda ortalama, medyan ve mod aynı noktaya karşılık gelir.

Bütün eğrilerin ortalamaya göre simetrik olduğu görülmektedir. X ekseni ile yapılan toplam alan 1'e eşittir.

Dağılımın ortalama ve varyansı;

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \cancel{\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma \cdot u + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot \cancel{\sigma} \cdot du$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} du}_{= \sqrt{2\pi}}$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = u$ olsun

$dx = \sigma \cdot du$

~~$x = \sigma \cdot u$~~

$x = \sigma \cdot u + \mu$ olur.

---

buradan; $\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du$, kısmi int.

$u = x \Rightarrow dx = du$

$e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du = dv$

$v = \sqrt{2\pi}$

$$= x \cdot \sqrt{2\pi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \cdot dx$$

$$= x \cdot \sqrt{2\pi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - x \cdot \sqrt{2\pi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \text{(simetrik)}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{1}{2} u^2} \cdot du}_{= 0} + \mu$$

simetrik

$$= \mu$$ bulunur.

Benzer şekilde $E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2$ olduğunu gösteriniz. → arkada

$$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

elde edilir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) \cdot e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M'_X(t=0) = (\mu + 0) \cdot e^0 = \mu \;// = E(x)$$

$$M''_X(t) = \sigma^2 \cdot e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 \cdot e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M''_X(t=0) = \sigma^2 \cdot e^0 + (\mu^2 + 0) \cdot e^0$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 \;// = E(x^2)$$

$$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$

$$= \sigma^2 \;//$$

Böylece X t.d.

$X \sim N(E(x) = \mu \,;\, V(x) = \sigma^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

dağılımına sahip olur.

μ ve σ^2 dağılımın iki parametresidir.